OTIMIZAÇÃO DA TRAJETÓRIA VERTICAL DE VÔO DE UMA AERONAVE CATEGORIA TRANSPORTE

Luiz Pradines de Menezes Junior
Pedro Paglione
Carlos Müller
Instituto Tecnológico de Aeronáutica

RESUMO
A teoria de simplificação de trajetórias de vôo, através de um método denominado "Energia Específica", normalmente é utilizada para o cálculo de trajetórias otimizadas de vôo para aeronaves supersônicas. Um algoritmo empregando este método foi desenvolvido nos anos 70 para o cálculo de trajetórias de vôo otimizadas para aeronaves subsônicas, em que o parâmetro a ser minimizado é o Custo Operacional Direto. Neste artigo, o algoritmo básico foi implementado com dados de desempenho de uma moderna aeronave de transporte de médio alcance. Os resultados da otimização são comparados àqueles obtidos através do uso da metodologia empregada atualmente para a redução de custos operacionais, visando à criação de um método alternativo e mais eficiente para o controle das trajetórias de vôo.

ABSTRACT
The simplification of the flight trajectories is obtained through a method named "Specific Energy". This method is normally used in the computation of optimized flight trajectories for supersonic aircraft. An algorithm using this method and the calculus of variations was developed in the seventies for the calculation of optimized flight paths, in which the parameter to be minimized is the Direct Operational Cost. In this paper, the basic algorithm was implemented using performance data for a modern medium-haul jet commercial aircraft. The results of this optimization were compared with the ones obtained through the use of the current methodology for the reduction of the operational costs, aiming the creation of an alternative and more efficient method to control the flight trajectories.

1. INTRODUÇÃO

No início dos anos 70, a escalada do preço do petróleo deflagrou uma série de esforços visando à redução do consumo de combustível pelas aeronaves. Isto propiciou o desenvolvimento de uma nova geração de aviões e motores, com menor consumo específico de combustível. O advento da miniaturização permitiu a construção de computadores de bordo (computadores de gerenciamento do vôo, ou "*FMC – Flight Management Computers*") mais eficientes, capazes de gerenciar a trajetória de vôo de uma forma ótima.

Visando à otimização do vôo das aeronaves, os computadores de bordo empregam uma lei de controle para as três fases de vôo (subida, cruzeiro e descida). Na fase de subida, o regime de tração é mantido fixo e a velocidade é controlada de acordo com o parâmetro que se tenciona minimizar: custo derivado do tempo de vôo, custo do combustível consumido ou uma combinação de ambos, que forma o chamado "Custo Operacional Direto". Em cruzeiro, a tração desenvolvida pelos motores é controlada de forma a se manter a velocidade ótima, que é uma função do peso corrente da aeronave. Em descida, a tração é mantida no regime de marcha lenta em vôo ("*Flight Idle*") e o parâmetro de controle é a velocidade da aeronave. Atualmente, o método empregado pelos fabricantes dos *FMC* baseia-se no parâmetro denominado "Índice de Custo", comumente referido na indústria de transporte aéreo como "*Cost Index*" (Boeing, 1989).

O controle da trajetória de subida de uma aeronave, na metodologia baseada no "*Cost Index*", é feito através da escolha de uma velocidade indicada de subida constante e que é função do peso inicial de subida da aeronave e do "*Cost Index*". Da mesma forma, a trajetória de descida é governada por uma velocidade indicada constante e que é função única do peso da aeronave no ponto conhecido como "*TOD – Top of Descent*".

Uma metodologia diferente foi proposta em alguns trabalhos, como os de (Erzberger *et al*, 1975) e (Barman e Erzberger, 1975). Nestes trabalhos, utilizam-se os conceitos de Energia Específica e Cálculo Variacional para a determinação de uma trajetória de vôo em que as velocidades indicadas de subida e descida variam constantemente ao longo do vôo.

Este artigo descreve a metodologia empregada na indústria aeronáutica atualmente ("*Cost Index*") para a otimização de trajetórias de vôo e a metodologia baseada nos conceitos de Energia Específica e Cálculo Variacional. Um programa em computador, escrito no aplicativo *Matlab*, foi implementado baseado em ambas as metodologias visando à comparação entre os seus resultados. O modelo de aeronave representado no programa contém dados de desempenho semelhantes ao de uma moderna aeronave de transporte a jato comercial de curto/médio alcance para 144 passageiros. É proposto um modelo alternativo de controle de velocidades e altitudes de vôo para a aeronave representada, cuja implantação em *FMC* é plenamente factível e que conduz a resultados melhores que os obtidos com a lei de controle empregada atualmente na indústria de transporte aéreo.

2. DEFINIÇÃO DOS ÍNDICES DE DESEMPENHO

Os custos operacionais de uma empresa aérea são aqueles derivados da operação de uma aeronave. Estes custos se dividem em custos operacionais diretos (como o custo do combustível, salários dos tripulantes, taxas aeroportuárias, execução de atividades de manutenção etc.) e em custos operacionais indiretos (como o custo para aquisição de ferramental de manutenção, biblioteca técnica, construção de hangares, entre outros). A forma como a empresa aérea opera as suas aeronaves é fator preponderante no custo operacional direto resultante (também comumente conhecido como *DOC*). O *DOC* pode ser dividido essencialmente em dois componentes básicos: o custo derivado do consumo de combustível, em uma dada rota, e o custo derivado do tempo para se cobrir esta rota. Assim, o *DOC* pode ser expresso através da seguinte equação:

$$DOC = C_F \bullet F + C_T \bullet T \tag{1}$$

em que *DOC*: Custo Operacional Direto [unidade monetária];
C_F: custo do combustível por unidade de massa [unidade monetária/kg];
F: consumo total de combustível em uma dada rota [kg]
C_T: custo por unidade de tempo [unidade monetária/s];
T: tempo de vôo em uma dada rota [s].

O *DOC* pode ser parametrizado através do uso de um fator que correlaciona o custo do combustível e o custo no tempo. Este fator, denominado σ, é expresso através da seguinte equação:

$$\sigma = \frac{C_F / C_T}{1 + C_F / C_T} \tag{2}$$

em que σ: índice de desempenho [s/kg].

σ está contido no intervalo [0,1]. Quando σ é igual a zero, o custo do combustível é desprezível em relação ao custo do tempo. Portanto, a trajetória deve minimizar o tempo total de vôo. Quando σ é igual a um, a trajetória deve minimizar a quantidade de combustível consumida na rota.

Assim, o *DOC* pode ser modelado de uma forma alternativa e expresso na forma integral como uma função do σ da seguinte maneira:

$$J = \int_0^T \left[\sigma \bullet FF + (1 - \sigma)\right] dt \tag{3}$$

em que J: custo equivalente;
FF: fluxo de combustível [kg/s].

O índice de desempenho, que quantifica a importância do custo por unidade de massa de combustível em relação ao custo por unidade de tempo, é usualmente expresso de uma forma diferente na moderna indústria de transporte aéreo. O índice de desempenho é expresso através de um parâmetro denominado "*Cost Index*", o qual é obtido através da seguinte equação:

$$CI = C_T / C_F \tag{4}$$

em que CI: índice de desempenho;
C_T: custo por unidade de tempo;
C_F: custo do combustível por unidade de massa.

A forma como o custo por unidade de tempo é expresso depende do sistema de unidades empregado pela empresa aérea. Se o sistema é o Imperial, o custo por unidade de tempo é expresso usualmente através de [US$/min]. Se o sistema é o Internacional, o custo por unidade de tempo é expresso em [US$/h]. Por sua vez, no

sistema Imperial, o custo do combustível é expresso como [(US$/100)/lb]. No sistema Internacional, o custo por unidade de massa de combustível é definido como [US$/kg].

Como o CI pode ser expresso em unidades de tempo que são minuto ou hora, é necessário converter-se o CI em um CI equivalente (CI_{eq}), capaz de ser traduzido como σ. A conversão do CI em CI_{eq} é feita, no sistema Imperial, através da seguinte equação:

$$CI_{eq} = CI/(36 \bullet 2{,}2046) \tag{5}$$

No sistema Internacional, a conversão do CI em CI_{eq} é feita através da equação:

$$CI_{eq} = CI/(60) \tag{6}$$

A conversão do CI_{eq} em σ é dada por:

$$\sigma = \frac{1}{1 + CI_{eq}} \tag{7}$$

3. ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO

Das equações de movimento de uma aeronave, sabe-se que:

$$\dot{V} = \frac{F \bullet \cos\alpha - D}{m} - g \bullet \text{sen}\gamma \tag{8}$$

em que $\dot{V}$: aceleração da aeronave [m/s²];
F: tração total dos motores [N];
α: ângulo de ataque [radiano];
D: arrasto [N];
m: massa [kg];
g: aceleração da gravidade [m/s²];
γ: ângulo da trajetória de subida da aeronave [radiano].

Assumindo um ângulo de ataque pequeno, pode-se simplificar a Equação 8 da seguinte forma:

$$\dot{V} = \frac{F - D}{m} - g \bullet \text{sen}\gamma \tag{9}$$

A energia específica total da aeronave é definida através da seguinte equação:

$$E = \frac{1}{2} \bullet V^2 + g \bullet h \tag{10}$$

em que E: energia específica da aeronave [m²/s²];
V: velocidade da aeronave [m/s];
g: aceleração da gravidade [m/s²];
h: altura de vôo [m].

A taxa de variação da energia específica da aeronave pode ser determinada derivando-se a Equação 10 em relação ao tempo, o que resulta em:

$$\dot{E} = V \bullet \dot{V} + g \bullet \dot{h} \tag{11}$$

A taxa de variação da altura de vôo h é expressa através da Equação 12:

$$\dot{h} = V \bullet \text{sen}\gamma \tag{12}$$

Substituindo as Equações 9 e 12 na Equação 11, temos:

$$\dot{E} = V \bullet \left(\frac{F - D}{m}\right) - V \bullet g \bullet \text{sen}\gamma + g \bullet V \bullet \text{sen}\gamma \Rightarrow$$

$$\dot{E} = V \bullet \left(\frac{F - D}{m}\right) \tag{13}$$

Como o ângulo de subida é pequeno, pode-se assumir que a sustentação é igual ao peso. Outra conseqüência desta hipótese é que a distância voada pela aeronave é composta pela integral da velocidade entre t=0 e t=T, onde T é o tempo total de vôo, como mostrado na Equação 14.

$$R = \int_0^T (V + V_W)\, dt \tag{14}$$

em que R: distância a ser voada [m];
V: velocidade da aeronave [m/s];
V_W: velocidade do vento [m/s].

Para a determinação da trajetória de vôo ótima entre dois pontos minimizando-se a Equação 3 e sujeitos às restrições dadas pelas Equações 13 e 14, promove-se uma mudança de variáveis na integração efetuada em 14. Ao invés de se usar o tempo como variável de integração, usa-se a energia. A mudança é exposta nas equações seguintes:

$$\dot{E} = \left(\frac{dE}{dt}\right) \Rightarrow dt = \left(\frac{dE}{\dot{E}}\right) \tag{15}$$

Após a mudança de variáveis, a Equação 3 pode ser reescrita como:

$$J = \int_{Ei}^{Ec}\left(\frac{P_{subida}}{\dot{E}}\right) dE + (R - d_{subida} - d_{descida}) \bullet \lambda + \int_{Ec}^{Ef}\left(\frac{P_{descida}}{\dot{E}}\right) dE \tag{16}$$

em que P: custo equivalente, $\sigma \bullet FF + (1-\sigma)$;
E_i: energia específica inicial da aeronave [m^2/s^2];
E_c: energia específica durante o cruzeiro da aeronave [m^2/s^2];
E_f: energia específica final da aeronave [m^2/s^2];
R: distância total a ser voada pela aeronave [m];
λ: custo por metro voado em cruzeiro;
d_{subida}: distância de subida [m];
$d_{descida}$: distância de descida [m].

Através da mudança de variável de integração, as equações que descrevem as distâncias voadas em subida e descida podem ser escritas nas seguintes formas:

$$d_{subida} = \int_{Ei}^{Ec}\left(\frac{V_{subida} + V_{w,subida}}{\dot{E}}\right) dE \tag{17}$$

$$d_{descida} = \int_{Ec}^{Ef}\left(\frac{V_{descida} + V_{w,descida}}{\dot{E}}\right) dE \tag{18}$$

Portanto, substituindo as Equações 17 e 18 na equação 16, teremos:

$$J = \int_{Ei}^{Ec}\left[\frac{P_{subida}}{\dot{E}} - \lambda \bullet \left(\frac{V_{subida} + V_{w,subida}}{\dot{E}}\right)\right] dE + \lambda \bullet R + \int_{Ec}^{Ef}\left[\frac{P_{descida}}{\dot{E}} - \lambda \bullet \left(\frac{V_{descida} + V_{w,descida}}{\dot{E}}\right)\right] dE \tag{19}$$

Dado que R é um valor fixo, a minimização de J é efetuada primeiramente minimizando-se o valor de λ. O valor de λ_{opt} é fornecido através da Equação 20:

$$\lambda_{opt}(E_{max}) = \min_{\pi,V} \frac{[\sigma \bullet FF + (1-\sigma)]}{V + V_W} \tag{20}$$

em que: π: controle de tração da aeronave.

A minimização ocorre através da pesquisa dos diversos valores de λ obtidos em várias altitudes de vôo e velocidades. Ao se determinar o valor mínimo de λ, os valores ótimos de altitude e velocidade são obtidos, derivando-se daí o valor ótimo de energia em cruzeiro (denotado por E_c na Equação 16). Após a determinação da

altitude, velocidade e λ_{opt} em cruzeiro, efetua-se a integração das equações de movimento da aeronave com a velocidade ótima de subida (ou de descida) sendo determinada através da minimização dos termos de subida e descida na Equação 19.

A soma das distâncias voadas em subida e descida (com uma distância voada em cruzeiro igual a zero) pode exceder a distância total a ser voada. Isto significa que a aeronave não alcançará a condição de minimização do λ. O programa desenvolvido resolve iterativamente este problema, ajustando o valor de λ de forma a fazer coincidirem os valores da distância total da trajetória e da distância a ser voada, dentro de certa margem de tolerância. A partir de certa distância de vôo, a aeronave pode alcançar a condição de vôo em cruzeiro, não sendo mais necessário reduzir-se o valor de λ, como mostrado na Figura 1.

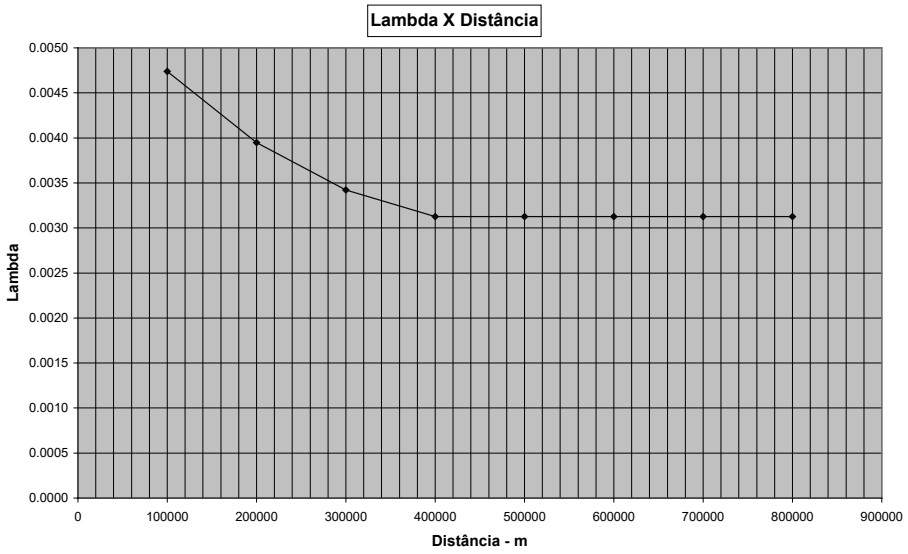


Figura 1: relação entre λ e a distância voada (σ=1, massa = 70.000 kg, condições *ISA*, vento nulo).

O ajuste de λ é efetuado através da redução da altitude de vôo. Para a nova altitude de vôo, determina-se o λ ajustado. A partir deste λ ajustado, em cada altitude de vôo, determina-se a velocidade V que minimiza o valor do integrando de J na correspondente etapa (subida ou descida). Com a velocidade e o nível de energia, que varia durante a integração, a nova altitude de vôo é determinada através da Equação 21.

$$h = \frac{\left(2 \bullet E - V^2\right)}{2 \bullet g} \tag{21}$$

em que: h: altitude de vôo [m];
E: energia específica [m^2/s^2];
V: velocidade da aeronave [m/s];
g: aceleração da gravidade [m/s^2].

O programa não permite que a altitude de vôo seja negativa ou que exceda o valor de altitude ótima. A pesquisa de velocidade, durante a integração, é feita entre a velocidade mínima de vôo (que pode ser aquela limitada pelo estol ou pela tração) e a velocidade máxima (que pode ser limitada por tração ou por limites homologados). No caso da aeronave modelada no programa, a velocidade máxima operacional (V_{MO}) é igual a 340 KIAS e o Mach máximo operacional (M_{MO}) é igual a 0.82. O programa também não permite que se exceda o número Mach ótimo durante a subida, para que não se alcance a energia final com uma altitude e uma velocidade diferente das ótimas calculadas através da minimização da Equação 20.

4. SINTETIZAÇÃO DAS TRAJETÓRIAS DE VÔO

Uma etapa fundamental do cálculo da trajetória ótima é a minimização da função descrita na Equação 20. Para tanto, foi utilizada a rotina *fmincon* do *Matlab*, que permite a minimização de uma função de muitas variáveis sujeitas a restrições. Entre estas restrições, relacionam-se a velocidade de estol, as velocidades máximas de operação e a máxima tração desenvolvida em regime de cruzeiro.
A Figura 2 mostra as trajetórias de vôo obtidas para um peso inicial de 70.000 kgf, condições *ISA*, distância total de vôo igual a 800 km e diversos σ.

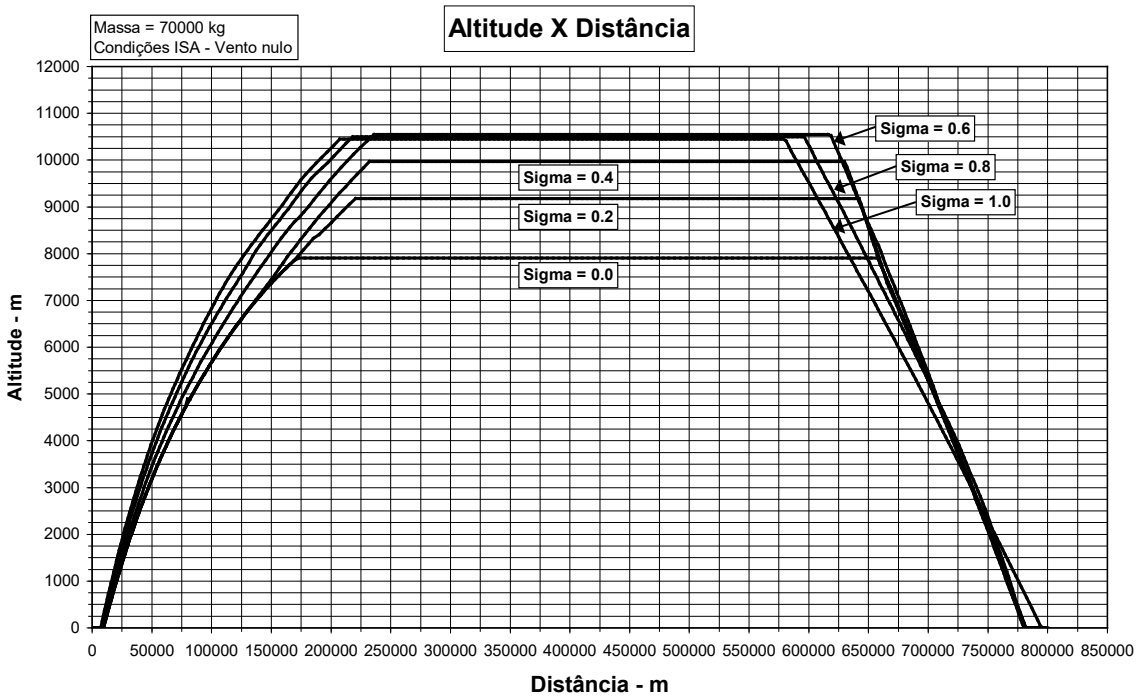


Figura 2: trajetórias de vôo para uma distância total de 800 km e peso inicial de 70.000 kgf.

Observa-se que a altitude ótima para $\sigma = 0,0$ é a mais baixa entre todas as altitudes ótimas obtidas com os diversos σ. Isto ocorre devido ao fato de $\sigma = 0,0$ representar tempo mínimo de vôo, o que torna mandatório o emprego de um regime de máxima velocidade. A máxima velocidade verdadeira ocorre quando os limites de V_{MO} e M_{MO} coincidem na altitude ótima de 7.908 m (25.947 pés). Também é possível observar-se que a ascensão da aeronave com $\sigma = 0,0$ é pouco íngreme. Isto ocorre devido à alta velocidade de subida, que reduz o excesso de tração disponível. O perfil de descida também é afetado pelo σ. Baixos valores de σ impõem altas velocidades, o que requer um ângulo acentuado de descida. Se for desejada a economia de combustível ($\sigma = 1,0$), então as velocidades tendem a ser mais baixas, incrementando-se a distância de descida e anulando a necessidade de desaceleração em uma altitude baixa.

Tendo em vista as limitações de processamento dos *FMC* atuais, em virtude de critérios de robustez computacional por se tratar de uma aplicação crítica para a segurança de vôo, não é possível calcular-se, em tempo real, a velocidade ótima através do algoritmo estudado. Tampouco é possível tabelar-se os resultados e carregá-los na memória do *FMC*, uma vez que a memória disponível tem pequena capacidade. Assim, o programa desenvolvido foi utilizado para gerar diversas trajetórias de vôo visando à determinação dos perfis ótimos de vôo (altitudes e velocidades) em função do σ, peso inicial e distância a ser voada. As trajetórias de vôo geradas tinham σ contidos no intervalo [0,0; 1,0] (delta $\sigma = 0,1$), pesos iniciais contidos no intervalo [50.000 kgf; 70.000 kgf] (delta peso = 5.000 kgf) e distâncias totais entre 100 km e 800 km, com intervalo de 100 km. Para fins de simplificação do estudo, as trajetórias foram geradas para uma condição atmosférica padrão (atmosfera ISA) e vento nulo.

O perfil ótimo de subida, calculado pelo programa, implica na manutenção de números Mach diferentes à medida que a aeronave sobe. Um perfil típico de subida é exibido na Figura 3.

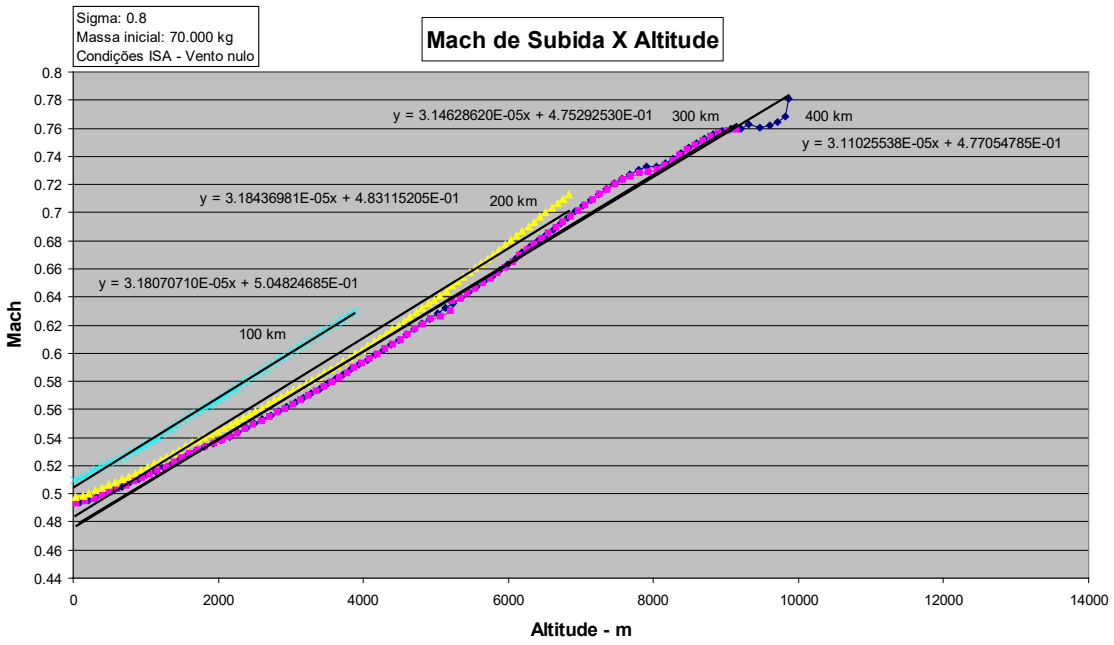


Figura 3: perfis de velocidade de subida e curvas de ajuste.

Após a análise de todas as trajetórias, tornou-se possível definir-se uma lei de controle de velocidades de subida quase-ideal como definido através das Equações 22 a 45.

$a_{11}= 2.04823002\bullet10^{-14}\bullet V_w^2+ 1.16590856\bullet10^{-13}\bullet V_w- 1.76100183\bullet10^{-10}$ (22)

$a_{12}= -1.86274036\bullet10^{-14}\bullet V_w^2-1.12915494\bullet10^{-13}\bullet V_w+3.75274896\bullet10^{-10}$ (23)

$a_{21}=-7.79107366\bullet10^{-10}\bullet V_w^2-5.96380996\bullet10^{-8}\bullet V_w+9.26527809\bullet10^{-7}$ (24)

$a_{22}=6.60438800\bullet10^{-10}\bullet V_w^2+3.97794752\bullet10^{-8}\bullet V_w+1.47295071\bullet10^{-5}$ (25)

$b_{11}=-2.63243939\bullet10^{-11}\bullet V_w^2-9.33346642\bullet10^{-9}\bullet V_w+1.36177669\bullet10^{-6}$ (26)

$b_{12}=1.83708575\bullet10^{-11}\bullet V_w^2+7.09196806\bullet10^{-9}\bullet V_w-4.0337657310^{-7}$ (27)

$b_{21}=5.10027343\bullet10^{-7}\bullet V_w^2+7.64287646\bullet10^{-4}\bullet V_w-1.73966568\bullet10^{-1}$ (28)

$b_{22}=9.58336571\bullet10^{-7}\bullet V_w^2-8.27467516\bullet10^{-4}\bullet V_w+0.566320846$ (29)

$a_1=a_{11}\bullet\sigma+a_{12}$ (30)

$a_2=a_{21}\bullet\sigma+a_{22}$ (31)

$b_1=b_{11}\bullet\sigma+b_{12}$ (32)

$b_2=b_{21}\bullet\sigma+b_{22}$ (33)

$a=a_1\bullet m+a_2$ (34)

$b=b_1\bullet m+b_2$ (35)

$M_{Subida}=a\bullet h+mult\bullet b$ (36)

em que: V_w: velocidade do vento [m/s];

σ: sigma [segundo por unidade de massa];

m: massa da aeronave [m];

h: altitude de vôo [pés];

M_{Subida}: número Mach de subida.

O termo "mult" refere-se ao fator associado à distância total a ser voada. Foi verificado que, à medida que a distância diminuía, o aumento do λ implicava no incremento da velocidade de subida. A expressão para este termo é dada através das Equações 37 e 38.

Se dt < 400 km:

$$mult = \left[-0.09 \Big/ \left(3 \bullet 10^5\right) \right] \bullet dt + 1 + 0.09 \bullet 4/3 \quad (37)$$

Se dt ≥ 400 km:

$mult = 1$ (38)

em que: dt: distância total a ser voada [m].

Para a descida, o perfil de velocidade quase-ideal é dado através das Equações 39 e 40.

$$M_{Descida\,(1)} = \left[2.0 \bullet 10^{-6}\right] \bullet h + mult_{(1)} \bullet \left[\begin{array}{l}\left(-4.487362 \bullet 10^{-7} \bullet \sigma - 1.88748466 \bullet 10^{-6}\right) \bullet m + \\ \left(-8.07906260 \bullet 10^{-1} \bullet \sigma + 1.32123638\right)\end{array}\right] \quad (39)$$

$$M_{Descida\,(2)} = \left[\left(1.99 \bullet 10^{-10}\right) \bullet m + \left(2.2 \bullet 10^{-5}\right)\right] \bullet h + + mult_{(2)} \bullet \left[\begin{array}{l}\left(1.22057250 \bullet 10^{-6} \bullet \sigma + 1.17321678 \bullet 10^{-6}\right) \bullet m + \\ \left(-3.11872985 \bullet 10^{-1} \bullet \sigma + 4.85949059 \bullet 10^{-1}\right)\end{array}\right] \quad (40)$$

O número Mach de descida é o maior entre $M_{Descida\,(1)}$ e $M_{Descida\,(2)}$. Portanto:

$$M_{Descida} = máximo\left(M_{Descida\,(1)}, M_{Descida\,(2)}\right) \quad (41)$$

Os termos "$mult_{(1)}$" e "$mult_{(2)}$" são devidos ao decremento de velocidade de descida quando a distância a ser voada diminui. Estes termos são expressos através das Equações 42 a 45.

Se dt < 400 km

$$mult_{(1)} = 1 \Big/ \left\{\left[-0.40 \Big/ \left(3 \bullet 10^{5}\right)\right] \bullet dt + 1 + 0.40 \bullet 4/3\right\} \quad (42)$$

$$mult_{(2)} = 1 \Big/ \left\{\left[-0.20 \Big/ \left(3 \bullet 10^{5}\right)\right] \bullet dt + 1 + 0.20 \bullet 4/3\right\} \quad (43)$$

Se dt ≥ 400 km:

$mult_{(1)} = 1$ (44)

$mult_{(2)} = 1$ (45)

Após a implementação do controle de velocidades no programa, tornou-se possível montar-se um gráfico representando o combustível e o tempo requeridos para vôos em diversas distâncias e valores de σ, como exposto na Figura 3.

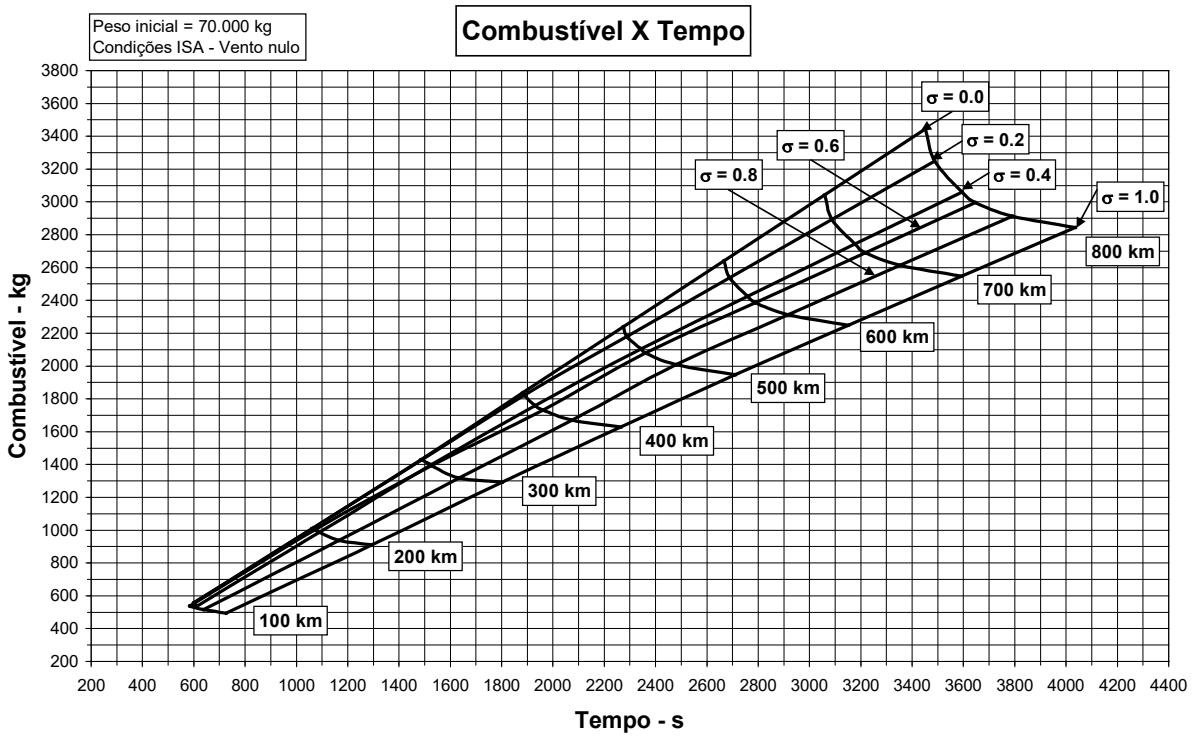


Figura 3: balanceamento de combustível e tempo para alcances de vôo fixos.

Analisando-se a figura, nota-se que, para uma distância fixa, à medida que σ aproxima-se de 0 (mínimo tempo), é requerida uma quantidade cada vez maior de combustível e o tempo de vôo não diminui de forma significativa. Por sua vez, à medida que o valor de σ aproxima-se de 1 (mínimo combustível), uma redução perceptível do consumo só ocorre quando o tempo de vôo é bastante incrementado (o que significa redução da velocidade da aeronave). Também se deve notar que, em distâncias menores que 400 km, não há diferenças perceptíveis entre os resultados para $\sigma = 0$ e $\sigma = 0.2$. Isto se deve ao fator relativo à distância, que incrementa a velocidade de subida quando a distância é pequena.

Para a verificação dos ganhos advindos do emprego do modelo de controle das velocidades de subida e descida descrito através das Equações 22 a 45, foram comparados os custos operacionais resultantes de vôos efetuados com a lei de controle fornecida por estas equações e aqueles custos operacionais diretos associados ao uso da lei de controle corrente na indústria. Este método corrente, conforme citado no início deste artigo, baseia-se nas seguintes hipóteses:

1. Durante a subida, é mantida uma velocidade indicada constante até que se atinja o número Mach correspondente à velocidade ótima de cruzeiro, assumindo-se uma certa variação de peso da aeronave até o ponto *TOC*.
2. A velocidade de cruzeiro é variada constantemente, de modo a minimizar-se o Custo Operacional Direto.
3. A descida é efetuada, inicialmente, com um número Mach constante e igual ao do final da etapa de cruzeiro. Ao se atingir a velocidade indicada ótima de descida, é mantida esta velocidade indicada até a altitude igual a zero.

Os valores de redução do custo (em porcentagem) estão expostos na Tabela 1. Foram assumidos ventos nulos durante todas as fases de vôo e condições *ISA*.

Tabela 1: redução de custos operacionais (%) através do uso da lei de controle (Eq. 22 a 45) em comparação ao método "*Cost Index*".

		Sigma					
Peso inicial (kg)	Distância (km)	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
50000	100	0.40	0.24	0.52	1.58	1.93	4.92
	200	0.72	-0.06	0.37	1.27	1.63	4.57
	300	0.74	-0.04	0.84	1.67	1.62	4.25
	400	2.33	3.37	1.37	1.04	1.48	4.55
	500	2.72	3.31	1.70	1.56	1.37	2.35
	600	2.80	3.77	1.81	1.52	1.36	2.19
	700	3.11	3.88	1.91	1.50	1.02	1.92
	800	3.62	3.98	2.00	1.50	0.97	1.70
55000	100	0.43	0.18	0.36	1.32	1.63	3.01
	200	0.22	0.18	0.24	0.84	1.27	2.94
	300	0.41	-0.08	0.27	1.44	1.15	2.79
	400	1.30	3.43	1.55	0.88	1.33	2.80
	500	2.38	3.46	1.62	1.40	1.05	1.74
	600	2.55	3.49	1.65	1.34	0.95	1.53
	700	2.90	3.51	1.67	1.29	0.87	1.38
	800	3.43	3.52	1.67	1.24	0.80	1.27
60000	100	0.25	0.09	0.22	1.21	1.11	1.60
	200	0.12	0.20	0.28	0.70	0.60	1.57
	300	0.21	0.06	0.22	0.42	0.29	1.35
	400	0.81	3.36	1.84	1.15	0.72	1.77
	500	2.04	3.49	1.87	1.33	0.68	0.96
	600	2.31	3.58	1.87	1.30	0.65	0.84
	700	2.70	3.64	1.86	1.26	0.62	0.75
	800	3.24	3.69	1.84	1.23	0.60	0.70
65000	100	0.32	0.01	0.11	0.93	0.57	0.41
	200	0.00	0.20	0.14	0.62	0.20	0.36
	300	0.07	0.02	0.22	0.47	0.26	0.49
	400	0.45	3.19	1.70	0.78	0.39	0.54
	500	1.63	3.43	1.87	1.19	0.41	0.55
	600	2.23	3.59	1.92	1.17	0.40	0.28
	700	2.37	3.71	1.94	1.15	0.39	0.26
	800	2.94	3.80	1.95	1.12	0.38	0.25
70000	100	0.40	-0.07	0.05	0.29	-0.09	-0.44
	200	0.00	0.21	0.12	0.52	-0.06	-0.06
	300	-0.10	-0.54	-0.40	0.51	0.14	0.07
	400	0.33	2.95	1.59	0.69	-0.06	0.27
	500	1.26	3.18	1.76	1.13	0.26	0.23
	600	1.79	3.35	1.80	1.09	0.53	0.30
	700	1.90	3.49	1.82	1.05	0.49	0.05
	800	2.41	3.60	1.83	1.02	0.46	0.07

Os valores constantes nas células em cinza, por serem menores que zero, indicam que houve um incremento de custos em algumas trajetórias. Cumpre informar que a estratégia de controle de velocidade em cruzeiro é obtida através da minimização da função descrita através da Equação 20, o que resulta em velocidades de cruzeiro variáveis em uma altitude de cruzeiro fixa.

Para a comparação entre os métodos de controle de velocidade, foram empregados os custos constantes na Tabela 2.

Tabela 2: valores utilizados para a comparação dos custos operacionais.

	Sigma					
	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
Custo no tempo (R$/s)	0.8465	0.8465	0.8465	0.8465	0.8465	0.0000
Custo do combustível (R$/kg)	0.0000	0.2116	0.5643	1.2698	3.3860	3.3860

Em termos absolutos, a redução dos custos operacionais pode ser estimada utilizando dados econômicos disponíveis para um operador brasileiro de aeronaves com desempenho semelhante à estudada (DAC, 2004). Serão considerados, para esta estimativa, os seguintes dados que caracterizam a realidade operacional deste operador em 2004:

Tripulantes Técnicos e Comissários de Bordo (R$): 70.499.581,00
Manutenção e Revisão (R$): 141.894.373,00
Combustível (R$): 351.390.009,00

Consumo de combustível (litros):	250.051.083
Consumo de combustível (kg):	196.290.100
Horas voadas:	71.582
Custo médio do combustível:	R$ 1,790156/kg
Custo médio horário:	R$ 0,82421/s
Sigma	0,6847

Para a análise de todas as rotas (CGNA, 2005) desta empresa aérea operada por uma aeronave com desempenho similar à estudada, assumem-se as seguintes hipóteses:

- Peso atual de pouso igual ao MZFW (54.658 kg) + reserva de 2.000 kg;
- Sem limitação de velocidade máxima abaixo de 10.000 pés;
- Vento nulo em todas as fases de vôo e temperaturas iguais a ISA+15°C;
- Combustível nulo consumido durante táxi, decolagem, aproximação e pouso;
- Aeroportos de origem e destino localizados ao nível do mar.

Para a totalidade das rotas operadas por esta empresa, o custo anual total pelo método de controle "Cost Index" é estimado em R$ 650.192.422,75. Ao se usar o método de controle através da Teoria de Controle Ótimo, estima-se um custo total anual de R$ 644.578.569,22, resultando-se em uma economia anual estimada de R$ 5.613.853,53.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A metodologia descrita neste artigo demonstra a viabilidade de criação de um método alternativo de controle da trajetória vertical de uma aeronave de transporte a jato baseado na Teoria de Controle Ótimo. As leis de controle assim obtidas são função do peso inicial da aeronave na trajetória de vôo, da distância a ser voada e do índice de custo do operador da aeronave, representado pela variável denominada σ (a qual simboliza a importância relativa do custo do combustível em face dos custos associados ao tempo de vôo). O modelo derivado proporcionou a redução do custo operacional direto em relação ao método usado correntemente na indústria de transporte aéreo, notadamente em etapas mais curtas. Isto se explica pela redução de custos observada durante as etapas de subida e descida, que são mais importantes em etapas curtas. Investigações adicionais são necessárias para levar-se em consideração o efeito de temperaturas diferentes da definida na atmosfera *ISA* e o efeito dos ventos em rota no perfil de descida.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Erzberger, H., McLean, J.D., e Barman, J.F. (1975) *Fixed-range optimum trajectories for short-haul aircraft*, NASA TN D-8115.

Barman, J.F. e Erzberger, H. (1975) Fixed-range optimum trajectories for short-haul aircraft. *Journal of Aircraft*, v. 13, n. 10, p. 748-754.

BOEING (1989). Jet Transport Performance Methods. The Boeing Company. Seattle. EUA.

DAC (2004) *Anuário do Transporte Aéreo Vol. 1 – Dados Estatísticos*. Disponível em: http://www.dac.gov.br. Acesso em: 5 de junho de 2005.

CGNA (2005). *Planos de Vôo Repetitivos. 2005*. Disponível em: http://www.cgna.gov.br/rpl/rpl_main.htm. Acesso em: novembro de 2005.